



شانس و احتمال (۴) بازی ناعادلانه!

اشاره

در مقاله «شانس و احتمال ۳» دیدیم که سارا و ستاره به بحث‌های خود دربارهٔ احتمال ادامه دادند. آن‌ها فهمیدند که معنای جمله‌هایی مثل این جمله چیست: «در پرتاب تاس، احتمال اینکه ۶ بیاید برابر است با $\frac{۱}{۶}$ ». کمی بعد، دربارهٔ بازی‌های شانسی صحبت کردند. آن‌ها بحث کردند که آیا قوانین آن بازی‌ها عادلانه است یا نه. منظورشان از عادلانه نبودن این بود که قوانین بازی ممکن است باعث شود که احتمال بردن یکی از بازیکنان بیشتر از دیگری باشد. اکنون ادامهٔ ماجرا را بخوانید:

ستاره و سارا مشغول بحث بودند. دوستشان نرگس که لبخند شیطنت‌آمیزی بر لب داشت، با دو تا سکه در دست به ستاره و سارا نزدیک شد و گفت: «بچه‌ها بیایید بازی! هر مرتبه، هردوی سکه‌ها را پرتاب می‌کنیم. اگر هردو رو آمدند، ستاره یک امتیاز می‌گیرد. اگر هردو پشت آمدند، سارا یک امتیاز می‌گیرد. و اگر یکی رو و دیگری پشت آمد، من یک امتیاز می‌گیرم. بعد از ۴۰۰ بار تکرار این بازی، هرکسی که امتیازش بالاتر باشد، برنده است.»

ستاره و سارا با هم مشورت کردند. ستاره گفت: «سارا! به نظرت در این بازی شرکت بکنیم یا نه؟ نکند که قوانینش به نفع نرگس باشد؟!»

اما سارا با خونسردی و اطمینان پاسخ داد: «نه، نگران نباش. مثل تاس است دیگر! با این تفاوت که نتیجهٔ پرتاب یک تاس شش حالت دارد، اما نتیجهٔ پرتاب دو سکه فقط سه حالت دارد:

۱. هردو پشت

۲. هردو رو

۳. یکی پشت و دیگری رو.»

ستاره پرسید: «یعنی می‌خواهی احتمال هریک از سه اتفاقی را که گفתי حساب کنی؟»

سارا جواب داد: «بله. این دستور را در یادداشت‌های کلاس ریاضی‌مان داشتیم:

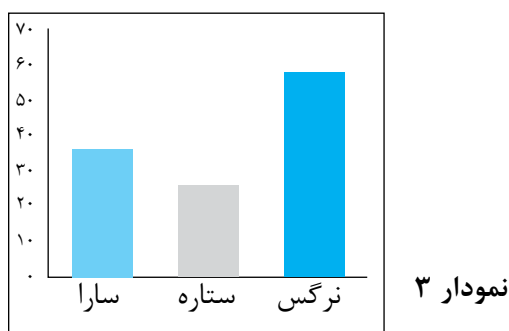
$$\text{احتمال رخ دادن یک اتفاق} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب برای رخ دادن آن}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن برای رخ دادن آن}}$$



ستاره باز هم نگران بود، اما سارا به او گفت: «نگران نباش! مثل همان بازی است که در آن تاس می‌انداختیم. در ابتدای بازی اصلاً عجیب نیست که بین امتیازها اختلاف وجود داشته باشد. تعداد دفعات بازی که بیشتر شود، می‌توانیم انتظار داشته باشیم که امتیازهایمان به هم نزدیک شود.»

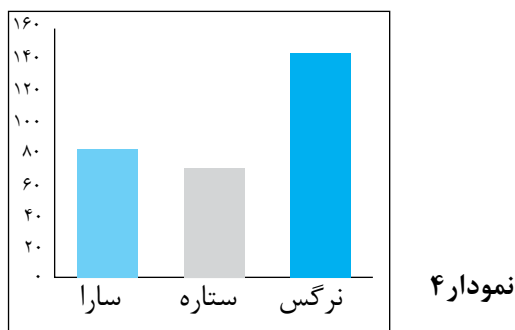
با ۴۰ مرتبه بازی دیگر، امتیازهای کل ۱۲۰ مرتبه بازی چنین شد:

- سارا: ۳۶ امتیاز
- ستاره: ۲۶ امتیاز
- نرگس: ۵۸ امتیاز (نمودار ۳)



بازی ادامه یافت و نتیجه کل ۳۰۰ مرتبه بازی این بود:

- سارا: ۸۵ امتیاز
- ستاره: ۷۰ امتیاز
- نرگس: ۱۴۵ امتیاز (نمودار ۴)



هنوز ۱۰۰ مرتبه دیگر باید بازی می‌کردند. سارا به نرگس گفت: «من و ستاره چند حرف درگوشی با هم داریم!» و شروع کرد به پیچ با ستاره: «من هم کم‌کم دارم نگران می‌شوم! وقتی تاس می‌انداختیم، معمولاً این‌طور نبود که یکی از ستون‌های نمودار، از دو ستون دیگر این همه بلندتر باشد.»

ستاره گفت: «اما خودت هم خوب می‌دانی که چنین اتفاقی غیرممکن نیست! حتی بدتر از آن هم ممکن بود بشود. قبل از آمدن نرگس داشتیم صحبت همین را می‌کردیم که ممکن است در ۳۰۰ بار تاس ریختن فقط ۶ بیاید. پس ممکن

در این بازی، تعداد حالت‌های ممکن برای پرتاب دو سکه برابر است با ۳. تعداد حالات مطلوب (یعنی آن‌هایی که من می‌برم) برابر است با ۱. نتیجه می‌گیرم که در هر مرتبه پرتاب، احتمال اینکه من امتیاز بگیرم برابر است با $\frac{1}{3}$ ».

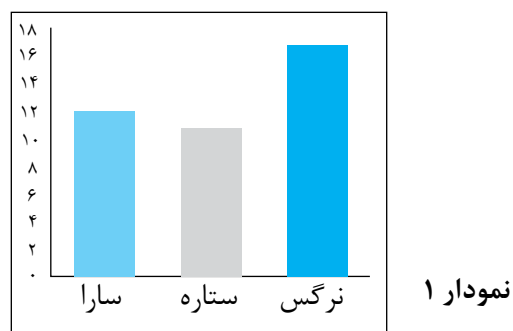
ستاره گفت: «خب، پس در هر مرتبه پرتاب، احتمال امتیاز گرفتن من هم $\frac{1}{3}$ است، و احتمال امتیاز گرفتن نرگس هم $\frac{1}{3}$ است.»

سارا گفت: «به همین دلیل می‌گویم که قوانین بازی به نفع هیچ‌یک از ما نیست. خیالت راحت باشد. قوانین بازی عادلانه است.»

ستاره به نرگس گفت: «قبول! بیا بازی کنیم. خوب امتیازها را هم ثبت کنیم و نمودارشان را هم بکشیم.»

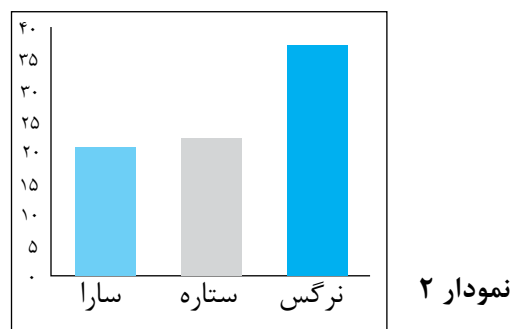
بازی شروع شد. در ۴۰ بار بازی، این نتیجه به دست آمد:

- سارا: ۱۲ امتیاز
- ستاره: ۱۱ امتیاز
- نرگس: ۱۷ امتیاز (نمودار ۱)

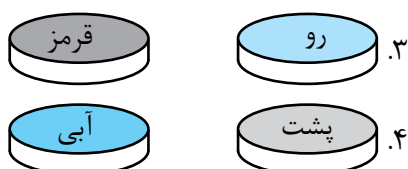


بازی را ۴۰ بار دیگر تکرار کردند در کل ۸۰ بار، امتیازها به این صورت شد:

- سارا: ۲۱ امتیاز
- ستاره: ۲۲ امتیاز
- نرگس: ۳۷ امتیاز (نمودار ۲)



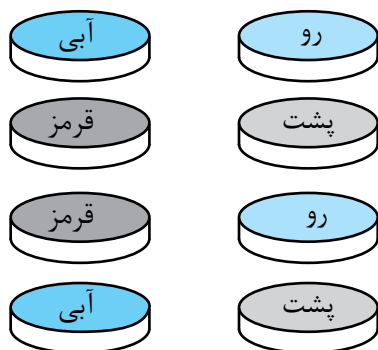
نه در یک صورت، بلکه در دو صورت امتیاز می‌گیرد» و این دو حالت را نوشت:



سارا گفت: «به نظر می‌رسد که سه حالت

رو، رو
پشت، پشت
یکی پشت و یکی رو

با هم از نظر محتمل بودن فرق دارند. اما اگر چهار حالت



را در نظر بگیریم، هیچ دلیلی نداریم که انتظار داشته باشیم یکی از این چهار حالت از حالتی دیگر بیشتر رخ دهد. بیا با نرگس صحبت کنیم.»

سارا به نرگس گفت: «نرگس! قوانین بازی عادلانه نیست.» نرگس پاسخ داد: «حالا که دارید می‌بازید این حرف را می‌زنید؟! خودتان هم خوب می‌دانید که در این بازی هیچ نتیجه‌ای غیرممکن نبود. ممکن بود تو تا حالا ۳۰۰ امتیاز گرفته باشی یا اینکه ستاره ۲۰۰ امتیاز گرفته باشد و تو ۱۰۰ امتیاز و من ۰ امتیاز!»

ستاره گفت: «نه! دلیل حرفمان این نیست که در این بازی امتیازمان خیلی کمتر از تو است. حتی اگر امتیازمان بالا هم بود، همین حرف را می‌زدیم! دلیلمان این است که اگر تعداد خیلی زیادی بازی کنیم، انتظار داریم بیشتر تو ببری تا هریک از ما.»

است در این بازی هم، در همه ۳۰۰ بازی که دو تا سکه را پرتاب کردیم، یک سکه رو و دیگری پشت بیاید و امتیاز نرگس ۳۰۰ شود!»

سارا گفت: «حق با توست. نمی‌توانیم با دیدن این نتایج و نمودارها مطمئن شویم که قوانین بازی به نفع نرگس هستند، اما این نمودارها مرا نگران می‌کنند. بیا بیشتر فکر کنیم. وقتی تاس می‌ریختیم، همه عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ در نظر ما یکسان بودند. پس وقتی دفعه‌های زیادی تاس می‌ریختیم، انتظار داشتیم همه عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ تقریباً به تعداد یکسانی بیایند.»

ستاره پرسید: «ممکن است این بازی تفاوت داشته باشد؟ آیا دلیلی داری که فکر کنیم **هر دو پشت، هر دو رو و یکی پشت و دیگری رو** با هم فرق دارند؟»

سارا جواب داد: «منظورت این است که طوری فرق کنند که انتظار داشته باشیم، یکی از این سه حالت بیشتر از دوتای دیگر رخ دهد؟»

ستاره جواب داد: «منظورم همین است که گفتی. من حدس می‌زنم اینکه یکی از سکه‌ها رو بیاید و دیگری پشت بیاید با دو وضعیت دیگر فرق دارد. اما نمی‌دانم چه فرقی!» سارا گفت: «شاید فرقی این است که یک بار ممکن است این رو بیاید و آن پشت بیاید، و بار دیگر آن رو بیاید و این پشت بیاید!»

ستاره با چشمانی گرد شده گفت: «من که هیچ چیزی از حرف‌هایت نفهمیدم!»

سارا گفت: «بیا به جای اینکه با دو تا سکه معمولی بازی کنیم، از یک سکه معمولی همراه با یک سکه رنگ‌شده استفاده کنیم. یعنی پشت یکی از سکه‌ها را قرمز کنیم و رویش را آبی. حالا بازی این‌طور می‌شود» و نوشت:



و ادامه داد: «در این حالت تو یک امتیاز می‌گیری.»



در این حالت من یک امتیاز می‌گیرم. حالا نرگس در چه صورت امتیاز می‌گیرد؟» ستاره گفت: «بگذار ببینم ... فهمیدم! نرگس بر خلاف ما،

نرگس گفت: «آخر چرا؟ مگر یادتان نیست؟ در کلاس ریاضی یاد گرفتیم احتمال رخ دادن اتفاقی مشخص را با دستور

$$\text{احتمال رخ دادن یک اتفاق} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب برای رخ دادن آن}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن برای رخ دادن آن}}$$

حساب کنیم. خب احتمال امتیاز

گرفتن هریک از ما برابر است با

$\frac{1}{3}$. پس قوانین عادلانه هستند.»

سارا گفت: «نه! احتمال برد

$\frac{1}{3}$ نیست. این دستور به این

شکلی که گفתי ناقص است. در

این دستور باید تعداد حالت‌ها را

حساب کنیم، اما این حالت‌ها نباید

هیچ فرقی با هم داشته باشند؛ یعنی

باید طوری باشند که انتظار نداشته

باشیم یکی از آن‌ها از دیگری بیشتر

رخ دهد. اما در این بازی، حالت

یک سکه رو و دیگری پشت

در واقع دو حالت است: **اولی رو و**

دومی پشت و اولی پشت و دومی رو.

انتظار داریم این اتفاق هم از اتفاق **هر دو پشت و هم از اتفاق**

هر دو رو بیشتر رخ دهد.»

و ستاره ادامه داد: «پس احتمال برد من $\frac{1}{4}$ است.

احتمال برد سارا هم $\frac{1}{4}$ است. اما احتمال برد تو $\frac{2}{4}$

است!»

نرگس لبخندی زد و گفت: «راستش را

بخواهید، از اول هم می‌دانستم که قوانین عادلانه

نیست. خواستم سربه‌سرتان بگذارم! من هم به مسائل مربوط

به پرتاب سکه و تاس و در کل به مبحث شانس علاقه‌مند هستم

و به همین دلیل قبلاً به این مسئله فکر کرده بودم. راستی! در

کتابی خوانده‌ام که یکی از ریاضی‌دان‌های قرن ۱۸ به نام **دالامبر**

اشتباهی مشابه شما مرتکب شده است. شاید شما هم بعدها

ریاضی‌دانی مانند دالامبر بشوید؛ شاید هم بسیار بهتر از او!»



دالامبر - ریاضی‌دان قرن ۱۸

